

7. évfolyam

1. Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika

Halmazba rendezés több szempont alapján a halmazműveletek alkalmazásával.

Két véges halmaz uniója, különbsége, metszete. A részhalmaz.

Az „és”, „vagy”, „ha”, „akkor”, „nem”, „van olyan”, „minden” „legalább”, „legfeljebb” kifejezések használata.

Egyszerű („minden”, „van olyan” típusú) állítások igazolása, cáfolata konkrét példák kapcsán.

A gyakorlati élethez és a társtudományokhoz kapcsolódó szöveges feladatok megoldása.

Egyszerű kombinatorikai feladatok megoldása különféle módszerekkel (fadiagram, útdiagram, táblázatok készítése).

Sorba rendezés. Néhány elem esetén az összes eset felsorolása.

2. Számelmélet, algebra

Racionális számok (véges, végtelen tizedes törtek), példák nem racionális számra (végtelen, nem szakaszos tizedes törtek).

A természetes, egész és racionális számok halmazának kapcsolata.

Műveletek racionális számkörben írásban és számológéppel. Az eredmény helyes és értelmes kerekítése. Eredmények becslése, ellenőrzése.

A hatványozás fogalma pozitív egész kitevőre.

Műveletek hatványokkal: azonos alapú hatványok szorzása, osztása.

Hatványozásnál az alap és a kitevő változásának hatása a hatványértékre.

10 pozitív egész kitevőjű hatványai.

Prímszám, összetett szám. Prímtényezős felbontás.

Matematikatörténet: érdekességek a prímszámok köréből.

Oszthatósági szabályok.

Számelméleti alapú játékok.

Matematikatörténet: tökéletes számok, barátságos számok.

Legnagyobb közös osztó, legkisebb pozitív közös többszörös.

Arány, aránypár, arányos osztás.

Egyenes arányosság, fordított arányosság.

Mértékegységek átváltása racionális számkörben.

Az alap, a százalékkérték és a százalékláb fogalmának ismerete, értelmezése, kiszámításuk következtetéssel, a megfelelő összefüggések alkalmazásával.

A mindennapjainkhoz köthető százalékszámítási feladatok.

Gazdaságossági számítások.

Az algebrai egész kifejezés fogalma. Egytagú, többtagú, egynemű kifejezés fogalma.

Helyettesítési érték kiszámítása.

Egyszerű átalakítások: zárójel felbontása, összevonás. Egytagú és többtagú algebrai egész kifejezések szorzása racionális számmal, egytagú egész kifejezéssel.

Elsőfokú egyenletek, elsőfokú egyenlőtlenségek megoldása. Mérlegelv.

Alaphalmaz, megoldáshalmaz.

A matematikából és a mindennapi életből vett egyszerű szöveges feladatok megoldása a tanult matematikai módszerek használatával. Ellenőrzés.

Egyszerű matematikai problémát tartalmazó hosszabb szövegek feldolgozása.

Feladatok például a környezetvédelem, az egészséges életmód, a vásárlások, a család jövedelmének ésszerű felhasználása köréből.

3. Függvények, sorozatok

Két halmaz közötti hozzárendelések megjelenítése konkrét esetekben. Függvények és ábrázolásuk a derékszögű koordináta-rendszerben.

Lineáris függvények.

Egyenes arányosság grafikus képe.

Egyismeretlenes elsőfokú egyenletek grafikus megoldása.

Grafikonok olvasása, értelmezése, készítése: szöveggel vagy matematikai alakban megadott szabály grafikus megjelenítése értéktáblázat segítségével.

Egyszerű sorozatok vizsgálata

4. Geometria

Háromszögek osztályozása oldalak, illetve szögek szerint.

A háromszögek magassága, magasságvonala, magasságpontja.

A háromszögek kerületének és területének kiszámítása.

A háromszög és a négyszög belső és külső szögeinek összege.

Paralelogramma, trapéz, deltoid tulajdonságai, kerülete, területe.

Szabályos sokszögek.

Kör kerülete, területe.

A kör és érintője.

A tanult síkbeli alakzatok (háromszög, trapéz, paralelogramma, deltoid) szerkesztése.

Nevezetes szögek szerkesztése: 15° , 45° , 75° , 105° , 135° .

Középpontos tükrözés.

A középpontos tükrözés tulajdonságai. A középpontos tükörkép szerkesztése.

Középpontosan szimmetrikus alakzatok a síkban.

A tanult sokszögek osztályozása szimmetria szerint.

Tengelyes és középpontos szimmetria alkalmazása szerkesztésekben.

Párhuzamos szárú szögek.

Az egybevágóság szemléletes fogalma, a háromszögek egybevágóságának esetei.

Az egybevágóság jelölése: \cong

Három- és négyszög alapú egyenes hasábok, forgáshenger hálójai, tulajdonságai, felszíne, térfogata.

Mértékegységek átváltása racionális számkörben.

Egyszerű számításos feladatok a geometria különböző területeiről.

5. Valószínűség, statisztika

Adatok gyűjtése, rendszerezése, adatsokaság szemléltetése, grafikonok készítése.

Adathalmazok elemzése (átlag, módusz, medián) és értelmezése, ábrázolásuk.

Számítási közép kiszámítása.

Valószínűségi kísérletek.

Valószínűség előzetes becslése.

Valószínűségi kísérletek, eredmények lejegyzése. Gyakoriság, relatív gyakoriság fogalma.

A továbbhaladás feltételei:

Gondolkodási és megismerési módszerek

- Elemek halmazba rendezése több szempont alapján.
- Egyszerű állítások igaz vagy hamis voltának eldöntése, állítások tagadása.
- Állítások, feltételezések, választások világos, érthető közlésének képessége, szövegek értelmezése egyszerűbb esetekben.
- Kombinatorikai feladatok megoldása az összes eset szisztematikus összeszámlálásával.

- Fagráfok használata feladatmegoldások során.

Számтан, algebra

- Biztos számolási ismeretek a racionális számkörben. A műveleti sorrendre, zárójelzésre vonatkozó szabályok ismerete, helyes alkalmazása. Az eredmény becslése, ellenőrzése, helyes és értelmes kerekítése.
- Mérés, mértékegység használata, átváltás. Egyenes arányosság, fordított arányosság.
- A százalékszámítás alapfogalmainak ismerete, a tanult összefüggések alkalmazása feladatmegoldás során.
- A legnagyobb közös osztó kiválasztása az összes osztóból, a legkisebb pozitív közös többszörös kiválasztása a többszörösök közül.
- Prímszám, összetett szám. Prímtényezős felbontás.
- Egyszerű algebrai egész kifejezések helyettesítési értéke. Összevonás. Többtagú kifejezés szorzása egytagúval.
- Négyzetre emelés, hatványozás pozitív egész kitevők esetén.
- Elsőfokú egyenletek és egyenlőtlenségek. A matematikából és a mindennapi életből vett egyszerű szöveges feladatok megoldása következtetéssel, egyenlettel. Ellenőrzés. A megoldás ábrázolása számegyenesen.
- A betűkifejezések és az azokkal végzett műveletek alkalmazása matematikai, természettudományos és hétköznapi feladatok megoldásában.
- Számológép ésszerű használata a számolás megkönnyítésére.

Összefüggések, függvények, sorozatok

- Megadott sorozatok folytatása adott szabály szerint.
- Az egyenes arányosság grafikonjának felismerése, a lineáris kapcsolatokról tanultak alkalmazása természettudományos feladatokban is.
- Grafikonok elemzése a tanult szempontok szerint, grafikonok készítése, grafikonokról adatokat leolvasása. Táblázatok adatainak kiolvasása, értelmezése, ábrázolása különböző típusú grafikonon.

Geometria

- A tanuló a geometriai ismeretek segítségével képes jó ábrákat készíteni, pontos szerkesztéseket végezni.
- Ismeri a tanult geometriai alakzatok tulajdonságait (háromszögek, négyszögek belső és külső szögeinek összege, nevezetesen négyszögek szimmetriatulajdonságai), tudását alkalmazza a feladatok megoldásában.
- Tengelyes és középpontos tükörkép szerkesztése.
- Háromszögek, speciális négyszögek és a kör kerületének, területének számítása feladatokban.
- A tanult testek (háromszög és négyszög alapú egyenes hasáb, forgáshenger) térfogatképleteinek ismeretében ki tudja számolni a mindennapjainkban előforduló testek térfogatát, űrmértékét.

Valószínűség, statisztika

- Valószínűségi kísérletek eredményeinek értelmes lejegyzése, relatív gyakoriságok kiszámítása.

- Konkrét feladatok kapcsán a tanuló képes esélylatolgatásra, felismeri a biztos és a lehetetlen eseményt.
- Zsebszámológép célszerű használata statisztikai számításokban.
- Néhány kiemelkedő magyar matematikus nevének ismerete, esetenként kutatási területének, eredményének megnevezése.

8. évfolyam

1. Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika

Halmazba rendezés több szempont alapján a halmazműveletek alkalmazásával.

Két véges halmaz uniója, különbsége, metszete. A részhalmaz.

Az „és”, „vagy”, „ha”, „akkor”, „nem”, „van olyan”, „minden”, „legalább”, „legfeljebb” kifejezések használata.

Egyszerű („minden”, „van olyan” típusú) állítások igazolása, cáfolata konkrét példák kapcsán.

A gyakorlati élethez és a társtudományokhoz kapcsolódó szöveges feladatok megoldása.

Egyszerű kombinatorikai feladatok megoldása különféle módszerekkel (fadiagram, útdiagram, táblázatok készítése).

Sorba rendezés, kiválasztás. Néhány elem esetén az összes eset felsorolása.

2. Számelmélet, algebra

A hatványozás fogalma pozitív egész kitevőre, egész számok körében.

10 egész kitevőjű hatványai.

A négyzetgyök fogalma.

Számok négyzete, négyzetgyöke.

Példa irracionális számra (π , $\sqrt{2}$).

Arány, aránypár, arányos osztás.

Egyenes arányosság, fordított arányosság.

Mértékegységek átváltása racionális számkörben.

A mindennapjainkhoz köthető százalékszámítási feladatok.

Gazdaságossági számítások.

Egyszerű átalakítások: zárójel felbontása, összevonás. Egytagú és többtagú algebrai egész kifejezések szorzása racionális számmal, egytagú egész kifejezéssel.

Elsőfokú, illetve elsőfokúra visszavezethető egyenletek, elsőfokú egyenlőtlenségek megoldása.

Azonosság.

Azonos egyenlőtlenség.

Alaphalmaz, megoldáshalmaz.

A matematikából és a mindennapi életből vett egyszerű szöveges feladatok megoldása a tanult matematikai módszerek használatával. Ellenőrzés.

Egyszerű matematikai problémát tartalmazó hosszabb szövegek feldolgozása.

Feladatok például a környezetvédelem, az egészséges életmód, a vásárlások, a család jövedelmének ésszerű felhasználása köréből.

3. Függvények, sorozatok

Függvények és ábrázolásuk a derékszögű koordináta-rendszerben.

Lineáris függvények.

(Példa nem lineáris függvényre: $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$).

Függvények jellemzése növekedés, csökkenés.

Grafikonok olvasása, értelmezése, készítése: szöveggel vagy matematikai alakban megadott szabály grafikus megjelenítése értéktáblázat segítségével.

Egyszerű sorozatok vizsgálata.

4. Geometria

Eltolás, a vektor fogalma.

Három- és négyszög alapú egyenes hasábok, forgáshenger hálóját, tulajdonságai, felszíne, térfogata.

Forgáskúp, gúla, gömb.

Mértékegységek átváltása racionális számkörben.

Pitagorasz tétele

A pitagoraszai számhármakok.

Egyszerű számításos feladatok a geometria különböző területeiről.

Kicsinyítés és nagyítás.

5. Valószínűség, statisztika

Adatok gyűjtése, rendszerezése, adatsokaság szemléltetése, grafikonok készítése.

Adathalmazok elemzése (átlag, módusz, medián) és értelmezése, ábrázolásuk.

Számítási közép kiszámítása.

Valószínűségi kísérletek.

Valószínűség előzetes becslése, szemléletes fogalma.

Valószínűségi kísérletek, eredmények lejegyzése.

A továbbhaladás feltételei:

Gondolkodási és megismerési módszerek

- Elemek halmazba rendezése több szempont alapján.
- Egyszerű állítások igaz vagy hamis voltának eldöntése, állítások tagadása.
- Állítások, feltételezések, választások világos, érthető közlésének képessége, szövegek értelmezése egyszerűbb esetekben.
- Kombinatorikai feladatok megoldása az összes eset szisztematikus összeszámlálásával.
- Fagráfok használata feladatmegoldások során.

Számítás, algebra

- Biztos számolási ismeretek a racionális számkörben. A műveleti sorrendre, zárójelre vonatkozó szabályok ismerete, helyes alkalmazása. Az eredmény becslése, ellenőrzése, helyes és értelmes kerekítése.
- Mérés, mértékegység használata, átváltás. Egyenes arányosság, fordított arányosság.
- A százalékszámítás alapfogalmainak ismerete, a tanult összefüggések alkalmazása feladatmegoldás során.
- A legnagyobb közös osztó kiválasztása az összes osztóból, a legkisebb pozitív közös többszörös kiválasztása a többszörösök közül.
- Prímszám, összetett szám. Prímtényező felbontás.
- Egyszerű algebrai egész kifejezések helyettesítési értéke. Összevonás. Többtagú kifejezés szorzása egytagúval.

- Négyzetre emelés, négyzetgyökvonás, hatványozás pozitív egész kitevők esetén.
- Elsőfokú egyenletek és egyenlőtlenségek. A matematikából és a mindennapi életből vett egyszerű szöveges feladatok megoldása következtetéssel, egyenlettel. Ellenőrzés. A megoldás ábrázolása számegyenesen.
- A betűkifejezések és az azokkal végzett műveletek alkalmazása matematikai, természettudományos és hétköznapi feladatok megoldásában.
- Számológép ésszerű használata a számolás megkönnyítésére.

Összefüggések, függvények, sorozatok

- Megadott sorozatok folytatása adott szabály szerint.
- Az egyenes arányosság grafikonjának felismerése, a lineáris kapcsolatokról tanult alkalmazása természettudományos feladatokban is.
- Grafikonok elemzése a tanult szempontok szerint, grafikonok készítése, grafikonokról adatokat leolvasása. Táblázatok adatainak kiolvasása, értelmezése, ábrázolása különböző típusú grafikonon.

Geometria

- A tanuló a geometriai ismeretek segítségével képes jó ábrákat készíteni, pontos szerkesztéseket végezni.
- Ismeri a tanult geometriai alakzatok tulajdonságait (háromszögek, négyszögek belső és külső szögeinek összege, nevezetes négyszögek szimmetriatulajdonságai), tudását alkalmazza a feladatok megoldásában.
- Tengelyes és középpontos tükrökép, eltolt alakzat képének szerkesztése. Kicsinyítés és nagyítás felismerése hétköznapi helyzetekben (szerkesztés nélkül).
- A Pitagorasz-tételt kimondása és alkalmazása számítási feladatokban.
- Háromszögek, speciális négyszögek és a kör kerületének, területének számítása feladatokban.
- A tanult testek (háromszög és négyszög alapú egyenes hasáb, forgáshenger) térfogatképleteinek ismeretében ki tudja számolni a mindennapjainkban előforduló testek térfogatát, űrmértékét.

Valószínűség, statisztika

- Valószínűségi kísérletek eredményeinek értelmes lejegyzése, relatív gyakoriságok kiszámítása.
- Konkrét feladatok kapcsán a tanuló érti az esély, a valószínűség fogalmát, felismeri a biztos és a lehetetlen eseményt.
- Zsebszámológép célszerű használata statisztikai számításokban.
- Néhány kiemelkedő magyar matematikus nevének ismerete, esetenként kutatási területének, eredményének megnevezése.

9. évfolyam

1. Gondolkodási és megismerési módszerek

Véges és végtelen halmazok. Végtelen számosság szemléletes fogalma, halmazok számossága

Részhalmaz. Halmazműveletek: unió, metszet, különbség. Halmazok közötti viszonyok

megjelenítése.

Alaphalmaz és komplementer halmaz.

A megismert számhalmazok: természetes számok, egész számok, racionális számok.

A számírás története.

Valós számok halmaza. Az intervallum fogalma, fajtái. Irracionális szám létezése.

Távolsággal megadott ponthalmazok, adott tulajdonságú ponthalmazok (kör, gömb, felező merőleges, szögfelező, középpárhuzamos).

Logikai műveletek: „nem”, „és”, „vagy”, „ha... akkor”.

A „minden” és a „van olyan” helyes használata.

Nyitott mondatok igazsághalmaza, szemléltetés módjai.

A matematikai bizonyítás. Kísérletezés, módszeres próbálkozás, sejtés, cáfolás szerepe a tudományosság kialakításában. Nevezetes sejtések.

Állítás és megfordítása.

„Akkor és csak akkor” típusú állítások.

Bizonyítás.

Egyszerű kombinatorikai feladatok: leszámlálás, sorbarendezés, gyakorlati problémák.

Kombinatorika a mindennapokban. Logikai szita.

A gráffal kapcsolatos alapfogalmak (csúcs, él, foksám).

Egyszerű hálózat szemléltetése.

2. Számтан, algebra

Számelmélet elemei.

A tanult oszthatósági szabályok. Prímtényezős felbontás, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös. Relatív prímelek.

Hatványozás 0 és negatív egész kitevőre. Permanencia-elv.

A hatványozás azonosságai.

Számok abszolút értéke.

Különböző számrendszerek. A helyiértékes írásmód lényege. Kettes számrendszer.

Számok normálalakja.

Nevezetes azonosságok: kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás.

Számolási szabályok, zárójelek használata.

$(a \pm b)^2$, $(a \pm b)^3$ polinom alakja, $a^2 - b^2$ szorzat $(a+b+c)^2$ alakja. Azonosság fogalma.

Egyszerű feladatok polinomok, illetve algebrai törtek közötti műveletekre. Tanult azonosságok alkalmazása. Algebrai tört értelmezési tartománya. Algebrai kifejezések egyszerűbb alakra hozása.

Elsőfokú egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása különböző módszerekkel (lebontogatás, mérlegelv, szorzattá alakítás, értelmezési tartomány és értékészlet vizsgálata, grafikus módszer). Egyszerű egyenletek paraméterrel.

Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása.

Elsőfokú egyenletre, egyenletrendszerre vezető szöveges számítási feladatok a természettudományokból, a mindennapokból.

Egyes változók kifejezése fizikai, kémiai képletekből.

Egy abszolútértéket tartalmazó egyenletek. $|x + c| = ax + b$.

3. Összefüggések, függvények, sorozatok

A függvény megadása, elemi tulajdonságai.

A lineáris függvény, lineáris kapcsolatok. A lineáris függvények tulajdonságai. Az egyenes arányosságot leíró függvény. A lineáris függvény grafikonjának meredeksége, ennek

jelentése lineáris kapcsolatokban.

Az abszolútérték-függvény. Az $x \mapsto |ax + b|$ függvény grafikonja, tulajdonságai ($a \neq 0$).

A négyzetgyökfüggvény. Az $x \mapsto \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) függvény grafikonja, tulajdonságai.

A fordított arányosság függvénye. $x \mapsto \frac{a}{x}$ ($ax \neq 0$) grafikonja, tulajdonságai.

Egyenlet, egyenletrendszer grafikus megoldása.

Az $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) másodfokú függvény ábrázolása és tulajdonságai.

Függvénytranszformációk.

4. Geometria

Geometriai alapfogalmak. Tételek, távolságok és szögek értelmezése.

A háromszög nevezetes vonalai, körei. Oldalfelező merőlegese, belső szögfelezők, magasságvonalak, súlyvonalak, középvonalak tulajdonságai. Körülírt kör, beírt kör.

Konvex sokszögek általános tulajdonságai. Átlók száma, belső szögek összege. Szabályos sokszög belső szöge.

Kör és részei, kör és egyenes. Ív, húr, körcikk, körszelet. Szelő, érintő.

A körív hossza. Egyenes arányosság a középponti szög és a hozzá tartozó körív hossza között

A körcikk területe. Egyenes arányosság a középponti szög és a hozzá tartozó körcikk területe között

A szög mérése. A szög ívmértéke.

Thalész tétele, és alkalmazásai.

Pitagorasz-tétel alkalmazásai.

A tengelyes és a középpontos tükrözés, az eltolás, a pont körüli elforgatás. A transzformációk tulajdonságai.

A geometriai vektorfogalom.

Egybevágóság, szimmetria.

Szimmetrikus négyszögek. Négyszögek csoportosítása szimmetriáik szerint.

Szabályos sokszögek.

Egyszerű szerkesztési feladatok.

Vektorok összege, két vektor különbsége.

Vektor szorzása valós számmal.

5. Valószínűség, statisztika

Statisztikai adatok és ábrázolásuk (gyakoriság, relatív gyakoriság, eloszlás, kördiagram, oszlopdiagram, vonaldiagram).

Adatsokaságok jellemzői: átlag, medián, módusz, terjedelem.

A továbbhaladás feltételei:

Gondolkodási és megismerési módszerek

- Halmazokkal kapcsolatos alapfogalmak ismerete, halmazok szemléltetése, halmazműveletek ismerete; számhalmazok ismerete.
- Értsék és jól használják a matematika logikában megtanult szakkifejezéseket a hétköznapi életben.
- Definíció, tétel felismerése, az állítás és a megfordításának felismerése; bizonyítás gondolatmenetének követése.
- Egyszerű leszámplálási feladatok megoldása, a megoldás gondolatmenetének rögzítése szóban, írásban.

Számтан, algebra

- Egyszerű algebrai kifejezések használata, műveletek algebrai kifejezésekkel; a tanultak alkalmazása a matematikai problémák megoldásában (pl. modellalkotás szöveg alapján, egyenletek megoldása, képletek értelmezése); egész kitevőjű hatványok, azonosságok.
- Elsőfokú egyismeretlenes egyenlet megoldása; ilyen egyenletre vezető szöveges és gyakorlati feladatokhoz egyenletek felírása és azok megoldása, a megoldás önálló ellenőrzése.
- Elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása; ilyen egyenletrendszerre vezető szöveges és gyakorlati feladatokhoz az egyenletrendszer megadása, megoldása, a megoldás önálló ellenőrzése.
- A tanulók képesek a matematikai szöveg értő olvasására, tankönyvek, keresőprogramok célirányos használatára, szövegekből a lényeg kiemelésére.

Összefüggések, függvények, sorozatok

- A függvény megadása, a szereplő halmazok ismerete (értelmezési tartomány, értékészlet); valós függvény alaptulajdonságainak ismerete.
- A tanult alapfüggvények ismerete (tulajdonságok, grafikon).
- Egyszerű függvénytranszformációk végrehajtása.
- Valós folyamatok elemzése a folyamathoz tartozó függvény grafikonja alapján.
- Függvénymodell készítése lineáris kapcsolatokhoz; a meredekség.
- A tanulók tudják az elemi függvényeket ábrázolni koordináta-rendszerben, és a legfontosabb függvénytulajdonságokat meghatározni, nemcsak a matematika, hanem a természettudományos tárgyak megértése miatt, és különböző gyakorlati helyzetek leírásának érdekében is.

Geometria

- Térelemek ismerete; távolság és szög fogalma, mérése.
- Nevezetes ponthalmazok ismerete, szerkesztésük.
- A tanult egybevágósági transzformációk és ezek tulajdonságainak ismerete.
- Egybevágó alakzatok; két egybevágó alakzat több szempont szerinti összehasonlítása (pl. távolságok, szögek, kerület, terület).
- Szimmetria ismerete, használata.
- Háromszögek tulajdonságainak ismerete (alaptulajdonságok, nevezetes vonalak, pontok, körök).
- Derékszögű háromszögre visszavezethető (gyakorlati) számítások elvégzése Pitagorasz-tétellel.
- Szimmetrikus négyszögek tulajdonságainak ismerete.
- Vektor fogalmának ismerete; három új művelet ismerete: vektorok összeadása, kivonása, vektor szorzása valós számmal.
- Kerület, terület, felszín és térfogat szemléletes fogalmának kialakulása, a jellemzők kiszámítása (képlet alapján); mértékegységek ismerete; valós síkbeli, illetve térbeli probléma geometriai modelljének megalkotása.
- A geometriai ismeretek bővülésével, a megismert geometriai

- transzformációk rendszerezettebb tárgyalása után fejlődik a tanulók dinamikus geometriai szemlélete, diskussziós képessége.
- A háromszögekről tanult ismeretek bővülésével a tanulók képesek számítási feladatokat elvégezni, és ezeket gyakorlati problémák megoldásánál alkalmazni.
 - A szerkesztési feladatok során törekednek az igényes, pontos munkavégzésre.

Valószínűség, statisztika

- Adathalmaz rendezése megadott szempontok szerint, adat gyakoriságának és relatív gyakoriságának kiszámítása.
- Táblázat olvasása és készítése; diagramok olvasása és készítése.
- Adathalmaz móduszának, mediánjának, átlagának értelmezése, meghatározása.
- A statisztikai feladatok megoldása során a diákok rendszerező képessége fejlődik. A tanulók képesek adatsokaságot jellemezni, ábrákról adatsokaság jellemzőit leolvasni.

10. évfolyam

1. Gondolkodási és megismerési módszerek

A matematikai bizonyítás. Kísérletezés, módszeres próbálkozás, sejtés, cáfolás. Nevezetes sejtések (pl. ikerprím sejtés); hosszán „élt”, de megoldott sejtések (pl.

Fermat-sejtés, négyszínsejtés).

Állítás, tétel és megfordítása. Szükséges feltétel, elegendő feltétel. „Akkor és csak akkor” típusú állítások.

Bizonyítás. Bizonyítási módszerek, jellegzetes gondolatmenetek (indirekt módszer, skatulya-elv) konkrét példákon keresztül.

Logikai műveletek: „nem”, „és”, „vagy”, „ha..., akkor”.

Szöveges feladatok.

Egyszerű kombinatorikai feladatok: leszámlálás, sorbarendezés, gyakorlati problémák.

Kombinatorika a mindennapokban.

A gráffal kapcsolatos alapfogalmak (csúcs, él, foksám).

Egyszerű hálózat szemléltetése.

2. Számтан, algebra

A négyzetgyök definíciója. A négyzetgyök azonosságai.

A másodfokú egyenlet megoldása, a megoldóképlet.

Diszkrimináns

Másodfokú egyenletre vezető gyakorlati problémák, szöveges feladatok.

Gyöktényezős alak. Másodfokú polinom szorzattá alakítása.

Gyökök és együtthatók összefüggései.

Néhány egyszerű magasabb fokú egyenlet megoldása.

Egyszerű négyzetgyökös egyenletek. $\sqrt{ax+b} = cx+d$.

Másodfokú egyenletrendszer.

A behelyettesítő módszer.

Egyszerű másodfokú egyenlőtlenségek. $ax^2 + bx + c \geq 0$ (vagy > 0) alakra visszavezethető egyenlőtlenségek ($a \neq 0$).

Ekvivalens és nem ekvivalens egyenletek, átalakítások. Alaphalmaz, értelmezési tartomány, megoldáshalmaz. Hamis gyök, gyökvesztés. Egyszerű paraméteres másodfokú egyenletek. Összefüggés két pozitív szám számtani és mértani közepe között

3. Összefüggések, függvények, sorozatok

Függvények alkalmazása másodfokú és gyökös egyenletek, egyenlőtlenségek megoldására; másodfokú függvényre vezető szélsőérték-feladatok

4. Geometria

A körrel kapcsolatos ismeretek bővítése: kerületi és középponti szög fogalma, kerületi szögek tétele; húrnégyszög fogalma, húrnégyszögek tétele. Látószög; látószöggörv mint speciális ponthalmaz (Thalész tételének általánosítása).

Párhuzamos szelők és szelőszakaszok tétele

Szögfelezőtétel

Középpontos hasonlóság, hasonlóság. Arányos osztás.

A hasonlósági transzformáció.

Hasonló alakzatok.

A háromszögek hasonlóságának alapesetei.

A hasonlóság alkalmazásai.

Háromszög súlyvonalai, súlypontja, hasonló síkidomok területének, területének aránya.

Magasságtétel, befogótétel a derékszögű háromszögben. Két pozitív szám mértani közepe.

A hasonlóság gyakorlati alkalmazásai. Távolság, szög, terület a tervrajzon, térképen.

Hasonló testek felszínének, térfogatának aránya.

Vektorok felbontása összetevőkre.

Vektorok a koordináta-rendszerben. Bázisvektorok, vektorkoordináták.

Hegyesszög szinusza, koszinusza, tangense és kotangense.

A Pitagorasz-tétel és a hegyesszög szögfüggvényeinek alkalmazása a derékszögű háromszög hiányzó adatainak kiszámítására. Távolságok és szögek számítása gyakorlati feladatokban, síkban és térben.

5. Valószínűség, statisztika

Valószínűségi kísérletek, az adatok rendszerezése, a valószínűség becslése.

Eseményekkel végzett műveletek. Példák események összegére, szorzatára, komplementer eseményre, egymást kizáró eseményekre.

Elemi események. Események előállítása elemi események összegeként. Példák független és nem független eseményekre.

Véletlen esemény és bekövetkezésének esélye, valószínűsége.

A valószínűség matematikai definíciójának bemutatása példákon keresztül.

A valószínűség klasszikus

modellje

A továbbhaladás feltételei:

Gondolkodási és megismerési módszerek

- Értsék, és jól használják a matematika logikában megtanult szakkifejezéseket a hétköznapi életben.
- Definíció, tétel felismerése, az állítás és a megfordításának felismerése; bizonyítás gondolatmenetének követése.

- Egyszerű összeszámlálási feladatok megoldása, a megoldás gondolatmenetének rögzítése szóban, írásban.
- Gráffal kapcsolatos alapfogalmak ismerete. Alkalmazzák a gráfokról tanult ismereteiket gondolatmenet szemléltetésére, probléma megoldására.

Számтан, algebra

- Másodfokú egyismeretlenes egyenlet megoldása; ilyen egyenletre vezető szöveges és gyakorlati feladatokhoz egyenletek felírása és azok megoldása, a megoldás önálló ellenőrzése.
- Másodfokú (egyszerű) kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása; ilyen egyenletrendszerre vezető szöveges és gyakorlati feladatokhoz az egyenletrendszer megadása, megoldása, a megoldás önálló ellenőrzése.
- Egyismeretlenes egyszerű másodfokú egyenlőtlenség megoldása.
- Az időszak végére elvárható a valós számkör biztos ismerete, e számkörben megismert műveletek gyakorlati és elvontabb feladatokban való alkalmazása.
- A tanulók képesek a matematikai szöveg értő olvasására, tankönyvek, keresőprogramok célirányos használatára, szövegekből a lényeg kiemelésére.

Összefüggések, függvények, sorozatok

- A tanult alapfüggvények ismerete (tulajdonságok, grafikon).
- Egyszerű függvénytranszformációk végrehajtása
- Valós folyamatok elemzése a folyamathoz tartozó függvény grafikonja alapján.

Geometria

- A körrel kapcsolatos ismeretek bővülésének hatása elméleti és gyakorlati számításokban.
- A hasonlósági transzformáció és tulajdonságainak ismerete.
- Hasonló alakzatok; két hasonló alakzat több szempont szerinti összehasonlítása (pl. távolságok, szögek, kerület, terület, térfogat).
- Derékszögű háromszögre visszavezethető (gyakorlati) számítások elvégzése Pitagorasz-tétellel és a hegyesszögek szögfüggvényeivel; magasságtétel és befogótétel ismerete.
- Vektor felbontása, vektorkoordináták meghatározása adott bázisrendszerben.
- A geometriai ismeretek bővülésével, a megismert geometriai transzformációk rendszerezettebb tárgyalása után fejlődik a tanulók dinamikus geometriai szemlélete, diszkussziós képessége.
- A háromszögekről tanult ismeretek bővülésével a tanulók képesek számítási feladatokat elvégezni, és ezeket gyakorlati problémák megoldásánál alkalmazni.
- A szerkesztési feladatok során törekednek az igényes, pontos munkavégzésre.

Valószínűség, statisztika

- Adathalmaz rendezése megadott szempontok szerint, adat gyakoriságának és relatív gyakoriságának kiszámítása.
- Táblázat olvasása és készítése; diagramok olvasása és készítése.
- Véletlen esemény, elemi esemény, biztos esemény, lehetetlen esemény, véletlen kísérlet, esély/valószínűség fogalmak ismerete, használata.
- Nagyszámú véletlen kísérlet kiértékelése, az előzetesen „jósolt” esélyek és a relatív gyakoriságok összevetése.

– A valószínűségszámítási, statisztikai feladatok megoldása során a diákok rendszerező képessége fejlődik. A tanulók képesek adatsokaságot jellemezni, ábrákról adatsokaság jellemzőit leolvasni. Szisztematikus esetszámlálással meg tudják határozni egy adott esemény bekövetkezésének esélyét a klasszikus modell alapján.

11. évfolyam

1. Gondolkodási és megismerési módszerek

Vegyes kombinatorikai feladatok, kiválasztási feladatok. A kombinatorika alkalmazása egyszerű geometriai feladatokban.

Mintavétel visszatevés nélkül és visszatevéssel.

Binomiális együtthatók.

Gráfelméleti alapfogalmak,

alkalmazásuk. Fokszám összeg és élek száma közötti összefüggés

2. Számтан, algebra

n -edik gyök fogalma, azonosságai.

A négyzetgyök fogalmának általánosítása.

Hatványozás pozitív alap és racionális kitevő esetén.

Hatványozás azonosságainak alkalmazása

A definíciók és a hatványozás azonosságainak közvetlen alkalmazásával megoldható exponenciális egyenletek.

A logaritmus értelmezése.

A logaritmus azonosságai.

A definíciók és a logaritmus azonosságainak közvetlen alkalmazásával megoldható logaritmusos egyenletek.

3. Összefüggések, függvények, sorozatok

Szögfüggvények kiterjesztése, trigonometrikus alapfüggvények (\sin , \cos , tg).

A trigonometrikus függvények transzformációi: $f(x)+c$, $f(x+c)$; $cf(x)$; $f(cx)$.

Az exponenciális függvények.

Exponenciális folyamatok a természetben és a társadalomban.

A logaritmusfüggvények vizsgálata. Logaritmus alapfüggvények grafikonja, jellemzésük.

A logaritmusfüggvény mint az exponenciális függvény inverze. Függvénynek és inverzének a grafikonja a koordináta-rendszerben.

4. Geometria

Szinusztétel, koszinusztétel.

Pitagoraszi összefüggés egy szög szinusza és koszinusza között. Összefüggés a szög és a mellékszöge szinusza, illetve koszinusza között. A tangens kifejezése a szinusz és a koszinusz hányadosaként.

Egyszerű trigonometrikus egyenletek. Trigonometrikus egyenletre vezető, háromszöggel kapcsolatos valós problémák. Azonosság alkalmazását igénylő egyszerű trigonometrikus

egyenlet.

Két vektor skaláris szorzata. A skaláris szorzat tulajdonságai. Két vektor merőlegességének szükséges és elégséges feltétele.

Helyvektor.

Műveletek koordinátáikkal adott vektorokkal. Vektorok és rendezett számpárok közötti megfeleltetés.

A helyvektor koordinátái.

Szakasz felezőpontjának, harmadoló pontjának, a háromszög súlypontjának koordinátái.

Két pont távolsága, a szakasz hossza.

A kör egyenlete.

Az egyenes különböző megadási módjai. Az irányvektor, a normálvektor, az iránytangens.

Iránytangens és az egyenes meredeksége.

A merőlegesség megfogalmazása skaláris szorzattal.

Az egyenes egyenlete.

Két egyenes párhuzamosságának, merőlegességének feltétele.

Két egyenes metszéspontja.

Kör és egyenes kölcsönös helyzete.

A kör adott pontjában húzott érintője.

A koordinátageometriai ismeretek alkalmazása egyszerű síkgeometriai feladatok megoldásában.

5. Valószínűség, statisztika

Eseményekkel végzett műveletek; példák események összegére, szorzatára, komplementer eseményre, egymást kizáró eseményekre;

elemi események. Események előállítása elemi események összegeként. Példák független és nem független eseményekre.

A valószínűség klasszikus modellje.

Egyszerű valószínűség-számítási problémák.

A továbbhaladás feltételei:

Gondolkodási és megismerési módszerek

- A kombinatorikai problémához illő módszer önálló megválasztása.
- A gráfok eszközjellegű használata problémamegoldásában.
- Bizonyított és nem bizonyított állítás közötti különbség megértése.
- Feltétel és következmény biztos felismerése a következtetésben.
- A szövegben található információk önálló kiválasztása, értékelése, rendezése problémamegoldás céljából.
- A szöveghez illő matematikai modell elkészítése.
- A tanulók a rendszerezett összeszámlálás, a tanult ismeretek segítségével tudjanak kombinatorikai problémákat jól megoldani,.
- A gráfok ne csak matematikai fogalomként szerepeljenek tudásukban, alkalmazzák ismereteiket a feladatmegoldásban is.

Számtan, algebra

- A kiterjesztett gyök- és hatványfogalom ismerete.
- A logaritmus fogalmának ismerete.
- A gyök, a hatvány és a logaritmus azonosságainak alkalmazása konkrét esetekben probléma megoldása céljából.

- Egyszerű exponenciális és logaritmusos egyenletek felírása szöveg alapján, az egyenletek megoldása, önálló ellenőrzése.
- A mindennapok gyakorlatában szereplő feladatok megoldása a valós számkörben tanult új műveletek felhasználásával.
- Számológép értelmes használata a feladatmegoldásokban.

Összefüggések, függvények, sorozatok

- Trigonometrikus függvények értelmezése, alkalmazása.
- Függvénytranszformációk végrehajtása.
- Exponenciális függvény és logaritmusfüggvény ismerete.
- Exponenciális folyamatok matematikai modelljének megértése.
- Az új függvények ismerete és jellemzése kapcsán a tanulóknak legyen átfogó képük a függvénytulajdonságokról, azok felhasználhatóságáról.

Geometria

- Jártasság a háromszögek segítségével megoldható problémák önálló kezelésében.
- A tanult tételek pontos ismerete, alkalmazásuk feladatmegoldásokban.
- A valós problémákhoz geometriai modell alkotása.
- Hosszúság és szög kiszámítása.
- Két vektor skaláris szorzatának ismerete, alkalmazása.
- Vektorok a koordináta-rendszerben, helyvektor, vektorkoordináták ismerete, alkalmazása.
- A geometriai és algebrai ismeretek közötti összekapcsolódás elemeinek ismerete: távolság, szög számítása a koordináta-rendszerben, kör és egyenes egyenlete, geometriai feladatok algebrai megoldása.

Valószínűség, statisztika

- A valószínűség matematikai fogalma.
- A valószínűség klasszikus kiszámítási módja.
- Mintavétel és valószínűség.
- A mindennapok gyakorlatában előforduló valószínűségi problémákat tudják értelmezni, kezelni.

12. évfolyam

1. Gondolkodási és megismerési módszerek

Logikai műveletek: „nem”, „és”, „vagy”, „ha... akkor”, „akkor és csak akkor” .

Kijelentés fogalma, műveletek kijelentésekkel: konjunkció, diszjunkció, negáció, implikáció, ekvivalencia. Logikai műveletek igazságtáblázatai, egyszerű azonosságok.

A logikai műveletek változatos alkalmazásai feladatokban.

2. Összefüggések, függvények, sorozatok

A számsorozat fogalma. A függvény értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza.

Számtani sorozat, az n . tag, az első n tag összege.

Mértani sorozat, az n . tag, az első n tag összege.

Kamatok kamat-számítás.

3. Geometria

Síkidomok kerületének és területének számítása.

Mértani testek csoportosítása. Hengerszerű testek (hasábok és hengerek), kúpszerű testek (gúla és kúpok), csonka testek (csonka gúla, csonka kúp). Gömb.

A tanult testek felszínének, térfogatának kiszámítása. Gyakorlati feladatok.

4. Valószínűség, statisztika

Egyszerű példák a valószínűség kiszámításának geometriai modelljére.

Adathalmazok jellemzői: átlag, medián, módusz, terjedelem, szórás. Nagy adathalmazok jellemzése statisztikai mutatókkal.

A továbbhaladás feltételei:

Gondolkodási és megismerési módszerek

- A logikai műveletek megfelelő alkalmazása a matematikában és a hétköznapi életben.
- Bizonyított és nem bizonyított állítás közötti különbség megértése.
- Feltétel és következmény biztos felismerése a következtetésben.
- A szövegben található információk önálló kiválasztása, értékelése, rendezése problémamegoldás céljából.
- A szöveghez illő matematikai modell elkészítése.

Számtan, algebra

Összefüggések, függvények, sorozatok

- A számtani és a mértani sorozat összefüggéseinek ismerete, gyakorlati alkalmazások.

Geometria

- A tanult tételek pontos ismerete, alkalmazásuk feladatmegoldásokban.
- A valós problémákhoz geometriai modell alkotása.
- Kerület, terület, felszín és térfogat kiszámítása

Valószínűség, statisztika

- Statisztikai mutatók használata adathalmaz elemzésében.
- A mindennapok gyakorlatában előforduló valószínűségi problémákat tudják értelmezni, kezelni.
- Megfelelő kritikával fogadják a statisztikai vizsgálatok eredményeit, lássák a vizsgálatok korlátait, érvényességi körét.

Összességében

- A matematikai tanulmányok végére a matematikai tudás segítségével önállóan tudjanak megoldani matematikai problémákat.
- Kombinatív gondolkodásuk fejlődésének eredményeként legyenek képesek többféle módon megoldani matematikai feladatokat.
- Fejlődjön a bizonyítási, diszkussziós igényük olyan szintre, hogy az érettségi után a döntési helyzetekben tudjanak reálisan dönteni.
- Feladatmegoldásokban rendszeresen használják a számológépet,

elektronikus eszközöket.

- Tudjanak a síkban, térben tájékozódni, az ilyen témájú feladatok megoldásához célszerű ábrákat készíteni.
- A feladatmegoldások során helyesen használják a tanult matematikai szakkifejezéseket, jelöléseket.
- A tanulók váljanak képessé a pontos, kitartó, fegyelmezett munkára, törekedjenek az önellenőrzésre, legyenek képesek várható eredmények becslésére.
- A helyes érvelésre szoktatással fejlődjön a tanulók kommunikációs készsége.
- A középfokú matematikatanulás lezárásakor rendelkezzenek a matematika alapvető kultúrtörténeti ismereteivel, ismerjék a legnagyobb matematikusok felfedezéseit, legyen rálátásuk a magyar matematikusok eredményeire.

MATEMATIKA
EMELT
9. évfolyam

**Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai
logika, kombinatorika, gráfok
Halmazok, ponthalmazok**

Halmazok.

Halmazokkal kapcsolatos ismeretek: üres halmaz, részhalmaz, halmazok egyenlősége.

Halmazműveletek: unióképzés, metszetképzés, különbségképzés, szimmetrikus differencia, komplementerhalmaz.

Descartes-féle szorzat.

A halmazműveletek tulajdonságai.

Összevetés a logikai műveletek tulajdonságaival.

Halmazok számossága.

n elemű halmaz részhalmazainak a száma.

Véges és végtelen halmazok.

**Számelmélet, algebra
Valós számok**

Számhalmazok:

- természetes számok,
- egész számok,
- racionális számok,
- irracionális számok,
- valós számok.

Műveleti tulajdonságok alkalmazása: kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás.

Számok tizedes tört alakja.

Véges, végtelen szakaszos, végtelen nem szakaszos tizedes törtek.

Számok normálalakja.

A valós számok és a számegyenes kapcsolata.

**Számelmélet, algebra
Algebrai kifejezések használata**

Algebrai kifejezések.

Egész kifejezések, polinomok, törtkifejezések.

Racionális és nem racionális kifejezések.

Nevezetes azonosságok:

$$(a \pm b)^2, (a \pm b)^3, (a + b + c)^2, a^2 - b^2, a^3 - b^3, a^3 + b^3.$$

Azonos átalakítások.

Polinomok összeadása, kivonása.

Polinomok szorzása, hatványozása.

Szorzattá alakítás különböző módszerei.

Polinom osztása polinommal.

Algebrai törtekkel végzett műveletek.

Algebrai törtek egyszerűsítése, összeadása, kivonása, szorzása, osztása.

Kifejezések legnagyobb közös osztója, legkisebb közös

többszöröse.

Számtani, mértani, négyzetes és harmonikus közép, a köztük lévő egyenlőtlenség.

Algebrai bizonyítás két változóra.

Számelmélet, algebra

Oszthatóság

Osztó, többszörös, oszthatóság, oszthatósági szabályok.

Algebrai azonosságok alkalmazása oszthatósági feladatokban.

Teljes indukció alkalmazása oszthatósági feladatokban.

Prímszám, összetett szám, prímtényezős felbontás.

A számelmélet alaptétele.

Végtelen sok prímszám van.

Néhány további tétel és sejtés a prímszámok elhelyezkedéséről.

Osztok számának, összegének, szorzatának meghatározása a prímtényezős felbontásból.

Kis Fermat-tétel.

Diofantoszi egyenletek.

Lineáris diofantoszi egyenlet.

Az $ax + by + cxy = d$ típusú diofantoszi egyenlet.

Szöveges feladatok megoldása diofantoszi egyenlettel.

Számelmélet, algebra

Egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer

Elsőfokú egyenletek.

Alaphalmaz, megoldáshalmaz, igazsághalmaz.

Ekvivalens átalakítások.

Elsőfokú paraméteres egyenletek.

Egyenletek grafikus megoldása.

Elsőfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok.

Törtés egyenletek, egyenlőtlenségek.

Értelmezési tartomány vizsgálata, hamis gyök.

Abszolút értéket tartalmazó egyenletek. (Több abszolút értéket tartalmazók is.)

Abszolút értéket tartalmazó egyenlőtlenségek.

Algebrai és grafikus megoldás.

Elsőfokú egyenletrendszerek.

Egyenletrendszerek grafikus megoldása.

Behelyettesítő módszer.

Egyenlő együtthatók módszere.

Új ismeretlen bevezetése.

Elsőfokú paraméteres egyenletrendszerek.

Egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok.

Elsőfokú egyenlőtlenségek.

Egyenlőtlenségek grafikus megoldása.

Egyismeretlenes egyenlőtlenségrendszer.

Függvények

Függvény fogalma.

Értelmezési tartomány, értékészlet.

A függvény megadási módjai, ábrázolása, jellemzése:
zérushely, monotonitás, szélsőérték, paritás.
Kapcsolat: logika elemei – bármely, van olyan, negáció.
Hétköznapi állítások tagadása.

Lineáris függvények.
Lineáris kapcsolatok felfedezése a hétköznapiakban.
Másodfokú függvények.
Teljes négyzetté kiegészítés.
Hatványfüggvények.
Negatív egész kitevőjű hatványfüggvények.
Abszolútérték-függvény. (Több abszolút értéket tartalmazók is.)
Egészrész-, törtrész-, előjelfüggvény, Dirichlet-féle függvény.
Függvények inverze.
Gyökfüggvények.
Fordított arányosság, elsőfokú törtfüggvény.
Függvénytranszformációk.
A tanult függvények többlépéses transzformációi.
A transzformációk rendszerezése, transzformációs sorrend.
 $|f(x)|$ ábrázolása.
Rekurzív sorozatok.
A Fibonacci-sorozat.

Geometria

Alapfogalmak, ponthalmazok, egybevágósági transzformációk

Geometriai alapfogalmak
Tételek kölcsönös helyzete, távolsága, szöge.
Sokszögek szögösszege, átlók száma.
A szög ívmértéke.
A radián mint mértékegység.
Átváltás fok és radián között.
Nevezetes ponthalmazok rendszerezése:
– adott térelemtől adott távolságra lévő pontok halmaza – síkban és térben.
– két térelemtől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza – síkban és térben. Parabola.
Egyenlőtávolsággal meghatározott ponthalmazok.
Ponthalmazok a koordinátasíkon. Koordinátákkal megadott feltételek.
Két, vagy három feltételnek megfelelő ponthalmazok szerkesztése.
Háromszög beírt, körülírt, hozzáírt körei.
Háromszög további nevezetes vonalai. (Bizonyítással.)
Középvonalak. (Négyszögek középvonalai is.)
Magasságok – magasságpont.
Súlyvonalak – súlypont.
Nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van és fordítva.
Pitagorasz tétele és a tétel megfordítása.
Pitagorasz tételének alkalmazása bizonyítási feladatokban.
Két pont távolsága koordináta-rendszerben.
Thalész tétele és a tétel megfordítása.
Körérintő szerkesztése, érintőnéyszög.

Geometriai transzformáció fogalma.

Egybevágósági transzformációk:

Tengelyes tükrözés, középpontos tükrözés, forgatás, eltolás, identitás.

A geometriai transzformációk tulajdonságai:

- fixpont, fix egyenes, fix sík,
- szögtartás, távolságtartás, irányítástartás.

Szimmetrikus alakzatok.

Geometriai szélsőérték-feladatok.

Háromszögbe írt minimális területű háromszög.

Izogonális pont.

Az egybevágóság fogalma.

Alakzatok egybevágósága.

A háromszögek egybevágóságának alapesetei.

Műveletek vektorokkal:

összeadás, kivonás, számmal való szorzás.

Vektorfelbontás tétele.

Vektor koordinátái.

Analógia a számhalmazokon végzett műveletekkel.

Statisztika. valószínűség

Statisztikai adatok gyűjtése, elemzése és ábrázolása.

Adatok rendezése, osztályokba sorolása, táblázatba rendezése, ábrázolása.

Adathalmazok jellemzői: terjedelem, átlag, medián, módusz, szórás.

A továbbhaladás feltételei:

Gondolkodási és megismerési módszerek

- Halmazműveletek alkalmazása számhalmazokra, ponthalmazokra.
- Definíció, tétel felismerése, az állítás és a megfordításának felismerése; bizonyítás gondolatmenetének követése.
- Bizonyítási módszerek ismerete, a logikai szita alkalmazása feladatmegoldás során.
- Gráfok használata gondolatmenet szemléltetésére.

Számelmélet, algebra

- Racionális és irracionális számok, a valós számok halmazának szemléletes fogalma, véges és végtelen tizedes törtek, számegyenes alkalmazása.
- Számok normálalakja, normálalakkal végzett műveletek alkalmazása.
- Oszthatóság, a számelmélet alaptétele, alkalmazása.
- Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös ismerete, alkalmazása.
- Algebrai kifejezésekkel végzett műveletek, azonosságok alkalmazása.
- Elsőfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, szöveges feladatok megoldása.
- A számológép használata.

Geometria

- Térelemek ismerete, távolság és szög fogalma, mérése.
- Nevezetes ponthalmazok rendszerezése, alkalmazása.
- A kör és részeinek ismerete.
- Egybevágósági transzformációk ismerete, alkalmazása szerkesztési és bizonyítási feladatokban, a művészetekben való alkalmazás ismerete.
- Egybevágó alakzatok tulajdonságainak ismerete, alkalmazása.
- Vektor fogalmának, vektorműveleteknek az ismerete. Vektorfelbontás adott bázisrendszerben.
- Háromszögek, négyszögek, sokszögek szögei, nevezetes vonalainak, köreinek ismerete. Az ismeretek alkalmazása számítási, szerkesztési és bizonyítási feladatokban.
- A Pitagorasz-tétel és a Thalész-tétel alkalmazása.

Függvények, sorozatok

- A függvény fogalmának mélyülése. Új függvényjellemzők ismerete
- A négyzetgyökfüggvény ábrázolása, jellemzése.
- Függvénytranszformációk elvégzése.
- Mindennapjainkhoz, más tantárgyakhoz kapcsolódó folyamatok elemzése a megfelelő függvény grafikonja alapján.

Valószínűség, statisztika

- Statisztikai adatok elemzése: adat gyakoriságának és relatív gyakoriságának kiszámítása.
- Táblázat olvasása és készítése; diagramok olvasása és készítése; adathalmaz móduszának, mediánjának, átlagának meghatározása.

10. évfolyam

Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok Halmazok, ponthalmazok

Logika.

Logikai műveletek: negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia.

Rendszerező ismétlés feladatokon keresztül.

A köznapi szóhasználat és a matematikai szóhasználat összevetése.

Logikai és halmazelméleti műveletek kapcsolata.

Kombinatorika.

Permutáció – ismétlés nélkül és ismétléssel.

Variáció – ismétlés nélkül és ismétléssel.

Kombináció – ismétlés nélkül.

Binomiális együtthatók, egyszerű tulajdonságaik.

Pascal háromszög.

Gráfok.

Számelmélet, algebra

Valós számok

Négyzetgyök.

A négyzetgyökvonás azonosságai.

Bevitel a gyökjel alá. Kivitel a gyökjel alól.

Nevező gyöktelenítése.

Az n -edik gyök fogalma.

A gyökvonás azonosságai.

Páros és páratlan gyökkitevő.

Bevitel a gyökjel alá. Kivitel a gyökjel alól.

A tört kitevőjű hatvány. Permanencia-elv.

Számelmélet, algebra

Egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer

Másodfokú függvények vizsgálata.

Teljes négyzetté alakítás használata.

Szélsőérték-feladatok másodfokú függvény vizsgálatával.

Kapcsolat: számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával történő megoldás.

Optimális megoldásokra törekvés.

Másodfokú egyenletek.

Grafikus megoldás.

Teljes négyzetté kiegészítés.

Egyenletmegoldás szorzattá alakítással.

A másodfokú egyenlet megoldóképlete.

A megoldóképlet készségi szintű alkalmazása.

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa.

Gyöktényezős alak, Viete-formulák.

Másodfokúra visszavezethető egyenletek.

Új ismeretlen bevezetése.

Racionális gyökök keresése.

Néhány további módszer az egyenlet speciális tulajdonságainak felhasználásával.

Másodfokú egyenlettel megoldható szöveges feladatok.

Másodfokú egyenlőtlenségek.

Másodfokú egyenletrendszer.

Másodfokú egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok.

Gyökös egyenletek.

Ekvivalens és nem ekvivalens egyenletmegoldási lépések.

Hamisgyök, gyökvesztés.

Paraméteres másodfokú és másodfokúra visszavezethető egyenletek.

Függvények

Másodfokú függvények

Gyökfüggvények

Hegyesszőgek szögfüggvényei

Pótszögek szögfüggvényei.

Összefüggések egy hegyesszög szögfüggvényei között.

Egyszerű trigonometrikus összefüggések bizonyítása.

Nevezetes szögek szögfüggvényei: 30° ; 60° ; 45° , az értékek megjegyzése.

Hegyeszög egy tetszőleges szögfüggvényének értékéből a többi szögfüggvény pontos értékének kiszámolása.

Geometria

Hasonlóság és kapcsolódó tételek

Kör és részei. Kerületi és középponti szögek, tételek, húrnégyszög

A párhuzamos szelők tétele (bizonyítás nélkül) és megfordítása, következmények.

Szögfelezőtétel.

A párhuzamos szelőszakaszok tétele.

Szakasz arányos osztása.

Negyedik arányos szerkesztése.

A középpontos hasonlóság fogalma és tulajdonságai.

A hasonlósági transzformáció fogalma és tulajdonságai.

Hasonló alakzatok.

A háromszögek hasonlóságának alapesetei.

A sokszögek hasonlósága.

A hasonló síkidomok területének aránya.

A hasonló testek felszínének és térfogatának aránya.

Arányossági tételek háromszögekben.

Magasságtétel, befogótétel.

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség geometriai bizonyítása.

Mértani közép szerkesztése.

Egyszerű szélsőérték-feladatok.

Körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele.

Aranymetszés.

Kapcsolat a Fibonacci-sorozattal.

További nem távolságtartó transzformációk.

Merőleges affinitás.

Kapcsolat a függvénytranszformációkkal.

Statisztika. valószínűség

Esemény, biztos esemény, lehetetlen esemény, komplementer esemény.

Egyszerűbb események valószínűsége.

Klasszikus valószínűségi modell.

A valószínűség meghatározása kombinatorikus eszközökkel.

A továbbhaladás feltételei:

Gondolkodási és megismerési módszerek

- Logikai műveletek és tulajdonságaik ismerete.
- Bizonyítási módszerek ismerete, a logikai szita és skatulyaelv alkalmazása feladatmegoldás során.
- Konstruktív feladatok megoldása, lehetetlenség bizonyítása.

- Gráfok használata gondolatmenet szemléltetésére.

Számelmélet, algebra

- A gyökvonás fogalmának ismerete, a gyökvonás azonosságainak alkalmazása, gyökös egyenletek megoldása.
- Első- és másodfokú, és másodfokúra visszavezethető egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, szöveges feladatok megoldása.
- Másodfokú függvényekre vezető szélsőérték-problémák megoldása.
- Nevezetes közepek alkalmazása szélsőérték problémák megoldásában.
- A számológép használata.

Geometria

- A kör és részeinek ismerete.
- Körrel kapcsolatos tételek alkalmazása (kerületi és középponti szögek tétele, húrnégyszögek és érintőnégyyszögek tételei).
- Hasonlósági transzformációk ismerete, alkalmazása szerkesztési és bizonyítási feladatokban, a művészetekben való alkalmazás ismerete.
- Hasonló alakzatok tulajdonságainak ismerete, alkalmazása.
- Hegyesszögek szögfüggvényeinek értelmezése, számolás szögfüggvényekkel. Szögfüggvények közötti összefüggések ismerete, alkalmazása.

Függvények, sorozatok

- Függvénytranszformációk elvégzése.
- Mindennapjainkhoz, más tantárgyakhoz kapcsolódó folyamatok elemzése a megfelelő függvény grafikonja alapján.

Valószínűség, statisztika

- Véletlen esemény, biztos esemény, lehetetlen esemény, véletlen kísérlet, esély/valószínűség fogalmak ismerete, használata. A műveletek elvégzése az eseménytérben.
- A valószínűség klasszikus modelljének alkalmazása.

11. évfolyam

Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok

Számhalmazok.

Számhalmazok bővítésének szükségessége a természetes számoktól a komplex számokig.

Algebrai számok, transzcendens számok.

Halmazok számossága.

Halmazok ekvivalenciája.

Végtelen és véges halmazok.

Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok.

Kontinuum-sejtés.

Konstrukciók. Lehetetlenségi bizonyítások.

Adott tulajdonságú matematikai objektumok konstruálása.

Adott tulajdonságú sorozatok, függvények, egyenletek, műveletek, ábrák, lefedések, színezések stb.

Kombinatorika

Permutáció – ismétlés nélkül és ismétléssel.

Variáció – ismétlés nélkül és ismétléssel.

Kombináció – ismétlés nélkül és ismétléssel.

Binomiális együtthatók, tulajdonságaik.

Pascal háromszög és tulajdonságai.

Binomiális tétel.

Gráfok.

Gráfelméleti alapfogalmak: csúcs, él, foksám, egyszerű gráf, összefüggő gráf, komplementer gráf, fagráf, kör, teljes gráf).

Gráfokra, éleikre, csúcsok foksámaira vonatkozó egyszerű tételek.

Euler-vonal, Hamilton-kör.

A matematika felépítése.

Fogalmak, alapfogalmak, axiómák, tételek, sejtések.

Műveletek a matematikában.

Műveleti tulajdonságok.

Relációk a matematikában és a mindennapi életben.

Relációtulajdonságok.

Bizonyítási módszerek áttekintése.

Direkt, indirekt bizonyítás, logikai szita formula, skatulyaelv, teljes indukció. Tételek megfordítása.

Hatvány, gyök, logaritmus

A racionális kitevőjű hatványok, a hatványozás azonosságai

Számolás racionális kitevőjű hatványokkal, gyökös kifejezésekkel.

Irracionális szám kétoldali közelítése racionális számokkal.

A hatványfogalom kiterjesztése irracionális számra.

Az exponenciális függvény.

Az exponenciális függvény ábrázolása, vizsgálata.

Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek.

Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával.

Számolás 10 hatványaival, 2 hatványaival.

A logaritmus fogalma.

Logaritmus értékének meghatározása a definíció alapján és számológéppel.

A logaritmus azonosságai.

Szorzat, hányados, hatvány logaritmus, áttérés más alapú logaritmusra.

Az értelmezési tartomány változásának vizsgálata az azonosságok kétirányú alkalmazásánál.

A logaritmus azonosságainak alkalmazása kifejezések számértékének meghatározására, kifejezések átalakítására.

A logaritmusfüggvény.

A logaritmusfüggvény ábrázolása, vizsgálata.
Adott alaphoz tartozó exponenciális és logaritmusfüggvény kapcsolata.
Inverz függvénykapcsolat.
Logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek.
Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával.
Értelmezési tartomány vizsgálatának fokozott szükségessége
logaritmusos egyenleteknél.
Paraméteres exponenciális és logaritmusos egyenletek.
Egyenletek ekvivalenciájával kapcsolatos ismeretek

Trigonometria

A szögfüggvények általános értelmezése.
Forgásszög, egységvektor, vektorkoordináták.
A szögfüggvények előjele a különböző síknegyedekben.
Szögfüggvények közötti összefüggések.
Egyszerű trigonometrikus összefüggések bizonyítása.
A trigonometrikus függvények.
A szögfüggvények értelmezési tartománya, értékkészlete, zérushelyek,
szélsőérték, periódus, monotonitás, paritás
A trigonometrikus függvények transzformáltjai, függvényvizsgálat.
Két vektor skaláris szorzata.
A skaláris szorzat tulajdonságai.
A skaláris szorzás alkalmazása számítási és bizonyítási
feladatokban.
Merőleges vektorok skaláris szorzata.
Szükséges és elégséges feltétel.
Két vektor skaláris szorzatának kifejezése a vektorkoordináták
segítségével.
A skaláris szorzat és a Cauchy-egyenlőtlenség kapcsolata.
Vektorok vektoriális szorzata.
A háromszög területének kifejezése két oldal és a közbezárt szög
segítségével.
A háromszög egy oldalának kifejezése a köré írt kör sugara és
szemközti szög segítségével.
Szinusztétel.
Koszinusztétel.
Szögfüggvények közötti összefüggések.
Addíciós tételek:

- két szög összegének és különbségének szögfüggvényei,
- egy szög kétszeresének szögfüggvényei,
- félszögek szögfüggvényei,
- két szög összegének és különbségének szorzattá alakítása.

A trigonometrikus azonosságok használata, több lehetőség
közül a legalkalmasabb összefüggés megtalálása.
Trigonometrikus kifejezések értékének meghatározása.
Háromszögekre vonatkozó feladatok addíciós tételekkel.
Trigonometrikus egyenletek..
Trigonometrikus egyenlőtlenségek.

Koordinátageometria

A Descartes-féle koordináta-rendszer.

A helyvektor és a szabadvektor.

Vektor abszolút értékének kiszámítása.

Két pont távolságának kiszámítása.

A Pitagorasz-tétel alkalmazása.

Két vektor hajlásszöge.

Skaláris szorzat használata.

Szakasz osztópontjának koordinátái.

A háromszög súlypontjának koordinátái.

Az egyenes helyzetét jellemző adatok: irányvektor, normálvektor, irányszög, iránytangens.

A különböző jellemzők közötti kapcsolat.

Az egyenes egyenletei.

- Adott pontra illeszkedő, adott normálvektorú egyenes, illetve sík egyenlete.
- Adott pontra illeszkedő, adott irányvektorú egyenes egyenlete síkban, egyenletrendszere térben.
- Iránytényezős egyenlet.

Geometriai feladatok megoldása algebrai eszközökkel.

Kétismeretlenes lineáris egyenlet és az egyenes egyenletének kapcsolata.

A feladathoz alkalmas egyenlettípus kiválasztása.

Két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének a feltétele.

Két egyenes metszéspontja.

Két egyenes szöge.

Skaláris szorzat használata.

A kör egyenlete.

Kétismeretlenes másodfokú egyenlet és a kör egyenletének kapcsolata.

Kör és egyenes kölcsönös helyzete.

A kör érintőjének egyenlete.

Két kör közös pontjainak meghatározása.

Másodfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása.

A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió.

A parabola tengelyponti egyenlete.

A parabola pontjainak tulajdonsága: fókuszpont, vezéregyenes.

A parabola és a másodfokú függvény.

Teljes négyzetté kiegészítés.

A parabola és az egyenes kölcsönös helyzete.

Ponthalmazok a koordinátasíkon.

Egyenlőtlenséggel megadott egyszerű feltételek.

Sorozatok

A sorozat fogalma, megadása, ábrázolása.

Sorozat megadása rekurzióval – Fibonacci-sorozat.

Rekurzív sorozat n -edik elemének megadása.

Számtani sorozat.

A számtani sorozat n -edik tagja.

A számtani sorozat első n tagjának összege.

Mértani sorozat.

A mértani sorozat n -edik tagja.

A mértani sorozat első n tagjának összege.

Gyakorlati alkalmazások – kamatos kamat számítása.

Törlesztési feladatok.

Pénzügyi alapfogalmak – kamatos kamat, törlesztőrészlet, hitel,

THM, gyűjtőjáradék.

Véges sorok összegzése.

Számtani és mértani sorozatból előállított szorzatok
összegzése.

Sorozatok konvergenciája.

A határérték szemléletes és pontos definíciói.

Műveletek konvergens sorozatokkal.

Konvergens és divergens sorozatok.

Az $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{n}$ $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatok.

Konvergens sorozatok tulajdonságai.

Torlódási pont.

Konvergens sorozatnak egy határértéke van.

Minden konvergens sorozat korlátos.

Monoton és korlátos sorozat konvergens.

Konvergens sorozatokra vonatkozó egyenlőtlenségek.

Rendőrelv.

Végtelen sorok.

Végtelen sor konvergenciája, összege.

Végtelen mértani sor.

Szakaszos végtelen tizedes tört átváltása.

Nevezetes egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok elemi megoldása

Azonos egyenlőtlenségek.

Nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek.

Nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek alkalmazása
szélsőérték-feladatok megoldásában.

Szélsőérték-feladatok megoldása függvénytulajdonságok segítségével.

(Másodfokú és trigonometrikus függvényekkel.)

Szélsőérték-feladatok megoldása fokozatos közelítés módszerével.

Bernoulli-egyenlőtlenség.

Cauchy-egyenlőtlenség.

Jensen-egyenlőtlenség.

Statisztika, valószínűség

Statisztikai mintavétel.

Mintavétel visszatevéssel, visszatevés nélkül.

Számsokaságok jellemzése: átlag, medián, módusz, szórás.

Átlagos abszolút eltérés, átlagos négyzetes eltérés.

A medián és az átlag minimumtulajdonsága.

Eseményalgebra.

Kapcsolat a halmazok és logika műveleteivel.

Véletlen jelenségek megfigyelése.

A modell és a valóság kapcsolata.
Klasszikus valószínűségi modell.
Események összegének, szorzatának, komplementerének valószínűsége.
Kizáró események, független események valószínűsége.
Feltételes valószínűség.
Mintavételre vonatkozó valószínűségek megoldása klasszikus modell alapján.
Nagy számok törvénye

A továbbhaladás feltételei

Gondolkodási és megismerési módszerek

- Halmazok számosságával kapcsolatos ismeretek áttekintése.
- A kombinatorikai problémák rendszerezése.
- Bizonyítási módszerek áttekintése.
- A gráfok eszköz jellegű használata probléma megoldásában.

Számelmélet, algebra

- A kiterjesztett gyök-, és hatványfogalom ismerete.
- A logaritmus fogalmának ismerete.
- A gyök, a hatvány és a logaritmus azonosságainak alkalmazása konkrét esetekben probléma megoldása céljából.
- Exponenciális és logaritmusos egyenletek megoldása, ellenőrzése.
- Trigonometrikus egyenletek megoldása, az azonosságok alkalmazása, az összes gyök megtalálása.
- Egyenletek ekvivalenciájának áttekintése.
- A számológép biztos használata.

Függvények, az analízis elemei

- Exponenciális-, logaritmus- és a trigonometrikus függvények értelmezése, ábrázolása, jellemzése.
- Függvénytranszformációk.
- Exponenciális folyamatok matematikai modellje.
- A számtani és a mértani sorozat. Rekurzív sorozatok.
- Pénzügyi alapfogalmak ismerete, pénzügyi számítások megértése, reprodukálása, kamatos kamatszámítás elvégzése.
- Sorozatok vizsgálata monotonitás, korlátosság, határérték szempontjából. Véges és végtelen sorok összegzése.

Geometria

- Vektorok a koordináta-rendszerben, helyvektor, vektorkoordináták.
- Két vektor skaláris szorzata, vektoriális szorzata.
- Jártasság a háromszögek segítségével megoldható problémák önálló kezelésében, szinusztétel, koszinusztétel alkalmazása.
- A geometriai és algebrai ismeretek közötti kapcsolódás elemeinek ismerete: távolság, szög számítása a koordináta-rendszerben, kör, egyenes, parabola egyenlete, geometriai feladatok algebrai megoldása.

Valószínűség, statisztika

- Statisztikai mutatók használata adathalmaz elemzésében.
- A valószínűség matematikai fogalma, klasszikus kiszámítási

- módja.
- Mintavétel és valószínűség kapcsolata, alkalmazása.

12. évfolyam

Folytonosság, differenciálszámítás

A valós számok halmazán értelmezett függvények jellemzése.

Függvény határértéke.

A függvények határértékének szemléletes fogalma, pontos definíciói. Jelölések.

Függvények véges helyen vett véges; véges helyen vett végtelen; végtelenben vett véges; végtelenben vett végtelen határértéke.

A sorozatok és a függvények határértékének kapcsolata.

A $\frac{\sin x}{x}$ függvény vizsgálata, az $x = 0$ helyen vett határértéke.

A függvények folytonossága.

Intervallumon folytonos függvények.

Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai.

A differenciálhatóság fogalma.

A különbségi hányados függvény, a differenciálhányados (derivált), a deriváltfüggvény.

Kapcsolat a differenciálható és a folytonos függvények között.

Alapfüggvények deriváltja: konstans függvény, x^n , trigonometrikus függvények deriváltja.

Műveletek differenciálható függvényekkel.

Függvény konstansszorosának deriváltja, összeg, szorzat, hányados, összetett függvény deriváltja.

Inverz függvény deriváltja.

Exponenciális és logaritmusfüggvény deriváltja. Magasabb rendű deriváltak.

A függvény tulajdonságai és a derivált kapcsolata.

Lokális növekedés, fogyás – intervallumon monoton függvény.

Szélsőérték – lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték.

A szükséges és az elégséges feltételek pontos megfogalmazása, alkalmazása.

Konvexitás, vizsgálata deriválással.

Inflexiós pont.

A második derivált és a konvexitás kapcsolata.

Függvényvizsgálat differenciálszámítással.

Integrálszámítás, térgeometria

A területszámítás alapelvei, módszerei

A térfogatszámítás alapelvei.

A térfogatszámítás új elemei.

Cavalieri-elv, a gúla térfogata.

Csonka gúla térfogata.

Érintőpoliéderek térfogata.

Alakzatok felszíne, hálójá.

Csonkakúp felszíne.

Gömb felszíne

Térgeometria elemei.

Tetraéderekre vonatkozó tételek.

Ortogonalis tetraéder.

Tetraéder és paralelepipedon.

Euler-féle poliéder-tétel. Szabályos testek.

Bevezető feladatok az integrál fogalmához.

Függvény grafikonja alatti terület.

A megtett út és a sebesség-idő grafikon alatti terület.

A munka kiszámítása az erő-út grafikon alatti terület alapján.

Alsó és felső közelítő összegek.

Az intervallum felosztása, a felosztás finomítása.

Közelítés véges összegekkel.

A határozott integrál fogalma, jelölése.

Negatív függvény határozott integrálja.

A határozott integrál és a terület-előjeles terület.

Az integrál közelítő kiszámítása.

Az integrálhatóság szükséges és elegendő feltétele.

Korlátos és monoton függvények integrálhatósága.

A határozott integrál tulajdonságai.

Az integrál mint a felső határ függvénye.

Integrálfüggvény.

Folytonos függvény integrálfüggvényének deriváltja.

Kapcsolat a differenciálszámítás és az integrálszámítás között.

A primitív függvény fogalma.

A primitív függvények halmaza – a határozatlan integrál:

- hatványfüggvény, polinom függvény;
- trigonometrikus függvények;
- exponenciális függvény, logaritmusfüggvény.

A Newton-Leibniz tétel.

Integrálási módszerek: integrálás helyettesítéssel.

Az integrálszámítás alkalmazása matematikai és fizikai problémákra.

Két függvénygörbe közötti terület meghatározása.

Forgástest térfogatának meghatározása.

Henger, kúp, csonka kúp, gömb, gömbszelet térfogata.

Az integrálás közelítő módszerei – numerikus módszerek.

Néhány egyszerűbb improprius integrál.

Néhány hatványsor

A továbbhaladás feltételei

Függvények, az analízis elemei

- A függvények vizsgálata, jellemzése elemi eszközökkel és differenciálszámítás használatával.
- Az integrálszámítás használata, gyakorlati alkalmazása

Geometria

- Térbeli viszonyok, testek felismerése, geometriai modell készítése.
- Távolság, szög, kerület, terület, felszín és térfogat kiszámítása.

Specializáció

11. évfolyam

Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok

Számhalmazok.

Számhalmazok bővítésének szükségessége a természetes számoktól a komplex számokig.

Algebrai számok, transzcendens számok.

Halmazok számossága.

Halmazok ekvivalenciája.

Végtelen és véges halmazok.

Megszámlálható és nem megszámlálható halmazok.

Kontinuum-sejtés.

Konstrukciók. Lehetetlenségi bizonyítások.

Adott tulajdonságú matematikai objektumok konstruálása.

Adott tulajdonságú sorozatok, függvények, egyenletek, műveletek, ábrák, lefedések, színezések stb.

Kombinatorika

Permutáció – ismétlés nélkül és ismétléssel.

Variáció – ismétlés nélkül és ismétléssel.

Kombináció – ismétlés nélkül és ismétléssel.

Binomiális együtthatók, tulajdonságaik.

Pascal háromszög és tulajdonságai.

Binomiális tétel.

Gráfok.

Gráfelméleti alapfogalmak: csúcs, él, fokszám, egyszerű gráf, összefüggő gráf, komplementer gráf, fagráf, kör, teljes gráf).

Gráfokra, éleikre, csúcsok fokszámaira vonatkozó egyszerű tételek.

Euler-vonal, Hamilton-kör.

A matematika felépítése.

Fogalmak, alapfogalmak, axiómák, tételek, sejtések.

Műveletek a matematikában.

Műveleti tulajdonságok.

Relációk a matematikában és a mindennapi életben.

Relációtulajdonságok.

Bizonyítási módszerek áttekintése.

Direkt, indirekt bizonyítás, logikai szita formula, skatulyaelv, teljes indukció. Tételek megfordítása.

Hatvány, gyök, logaritmus

A racionális kitevőjű hatványok, a hatványozás azonosságai

Számolás racionális kitevőjű hatványokkal, gyökös kifejezésekkel.

Irracionális szám kétoldali közelítése racionális számokkal.

A hatványfogalom kiterjesztése irracionális számra.

Az exponenciális függvény.

Az exponenciális függvény ábrázolása, vizsgálata.

Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek.

Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával.

Számolás 10 hatványaival, 2 hatványaival.

A logaritmus fogalma.

Logaritmus értékének meghatározása a definíció alapján és számológéppel.

A logaritmus azonosságai.

Szorzat, hányados, hatvány logaritmus, áttérés más alapú logaritmusra.

Az értelmezési tartomány változásának vizsgálata az azonosságok kétirányú alkalmazásánál.

A logaritmus azonosságainak alkalmazása kifejezések számértékének meghatározására, kifejezések átalakítására.

A logaritmusfüggvény.

A logaritmusfüggvény ábrázolása, vizsgálata.

Adott alaphoz tartozó exponenciális és logaritmusfüggvény kapcsolata.

Inverz függvénykapcsolat.

Logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek.

Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával.

Értelmezési tartomány vizsgálatának fokozott szükségessége logaritmusos egyenleteknél.

Paraméteres exponenciális és logaritmusos egyenletek.

Egyenletek ekvivalenciájával kapcsolatos ismeretek

Trigonometria

A szögfüggvények általános értelmezése.

Forgásszög, egységvektor, vektorkoordináták.

A szögfüggvények előjele a különböző síknyedekben.

Szögfüggvények közötti összefüggések.

Egyszerű trigonometrikus összefüggések bizonyítása.

A trigonometrikus függvények.

A szögfüggvények értelmezési tartománya, értékkészlete, zérushelyek, szélsőérték, periódus, monotonitás, paritás

A trigonometrikus függvények transzformáltjai, függvényvizsgálat.

Két vektor skaláris szorzata.

A skaláris szorzat tulajdonságai.

A skaláris szorzás alkalmazása számítási és bizonyítási feladatokban.

Merőleges vektorok skaláris szorzata.

Szükséges és elégséges feltétel.

Két vektor skaláris szorzatának kifejezése a vektorkoordináták segítségével.

A skaláris szorzat és a Cauchy-egyenlőtlenség kapcsolata.

Vektorok vektoriális szorzata.

A háromszög területének kifejezése két oldal és a közbezárt szög segítségével.

A háromszög egy oldalának kifejezése a köré írt kör sugara és szemközti szög segítségével.

Színusztétel.

Koszínusztétel.

Szögfüggvények közötti összefüggések.

Addíciós tételek:

- két szög összegének és különbségének szögfüggvényei,
 - egy szög kétszeresének szögfüggvényei,
 - félszögek szögfüggvényei,
 - két szög összegének és különbségének szorzattá alakítása.
- A trigonometrikus azonosságok használata, több lehetőség közül a legalkalmasabb összefüggés megtalálása.
Trigonometrikus kifejezések értékének meghatározása.
Háromszögre vonatkozó feladatok addíciós tételekkel.

Trigonometrikus egyenletek..

Trigonometrikus egyenlőtlenségek.

Koordináta geometria

A Descartes-féle koordináta-rendszer.

A helyvektor és a szabadvektor.

Vektor abszolút értékének kiszámítása.

Két pont távolságának kiszámítása.

A Pitagorasz-tétel alkalmazása.

Két vektor hajlásszöge.

Skaláris szorzat használata.

Szakasz osztópontjának koordinátái.

A háromszög súlypontjának koordinátái.

Az egyenes helyzetét jellemző adatok: irányvektor, normálvektor, irányszög, iránytangens.

A különböző jellemzők közötti kapcsolat.

Az egyenes egyenletei.

- Adott pontra illeszkedő, adott normálvektorú egyenes, illetve sík egyenlete.
- Adott pontra illeszkedő, adott irányvektorú egyenes egyenlete síkban, egyenletrendszerében.
- Iránytényezős egyenlet.

Geometriai feladatok megoldása algebrai eszközökkel.

Kétismeretlenes lineáris egyenlet és az egyenes egyenletének kapcsolata.

A feladathoz alkalmas egyenlettípus kiválasztása.

Két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének a feltétele.

Két egyenes metszéspontja.

Két egyenes szöge.

Skaláris szorzat használata.

A kör egyenlete.

Kétismeretlenes másodfokú egyenlet és a kör egyenletének kapcsolata.

Kör és egyenes kölcsönös helyzete.

A kör érintőjének egyenlete.

Két kör közös pontjainak meghatározása.

Másodfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása.

A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió.

A parabola tengelyponti egyenlete.

A parabola pontjainak tulajdonsága: fókuszpont, vezéregyenes.

A parabola és a másodfokú függvény.

Teljes négyzetté kiegészítés.

A parabola és az egyenes kölcsönös helyzete.

Ponthalmazok a koordinátasíkon.

Egyenlőtlenséggel megadott egyszerű feltételek.

Sorozatok

A sorozat fogalma, megadása, ábrázolása.

Sorozat megadása rekurzióval – Fibonacci-sorozat.

Rekurzív sorozat n -edik elemének megadása.

Számtani sorozat.

A számtani sorozat n -edik tagja.

A számtani sorozat első n tagjának összege.

Mértani sorozat.

A mértani sorozat n -edik tagja.

A mértani sorozat első n tagjának összege.

Gyakorlati alkalmazások – kamatos kamat számítása.

Törlesztési feladatok.

Pénzügyi alapfogalmak – kamatos kamat, törlesztőrészlet, hitel,

THM, gyűjtőjáradék.

Véges sorok összegzése.

Számtani és mértani sorozatból előállított szorzatok
összegzése.

Sorozatok konvergenciája.

A határérték szemléletes és pontos definíciói.

Műveletek konvergens sorozatokkal.

Konvergens és divergens sorozatok.

Az $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{n}$ $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozatok.

Konvergens sorozatok tulajdonságai.

Torlódási pont.

Konvergens sorozatnak egy határértéke van.

Minden konvergens sorozat korlátos.

Monoton és korlátos sorozat konvergens.

Konvergens sorozatokra vonatkozó egyenlőtlenségek.

Rendőrelv.

Végtelen sorok.

Végtelen sor konvergenciája, összege.

Végtelen mértani sor.

Szakaszos végtelen tizedes tört átváltása.

Nevezetes egyenlőtlenségek, szélsőérték-feladatok elemi megoldása

Azonos egyenlőtlenségek.

Nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek.

Nevezetes közepek közötti egyenlőtlenségek alkalmazása
szélsőérték-feladatok megoldásában.

Szélsőérték-feladatok megoldása függvénytulajdonságok segítségével.
(Másodfokú és trigonometrikus függvényekkel.)
Szélsőérték-feladatok megoldása fokozatos közelítés módszerével.
Bernoulli-egyenlőtlenség.
Cauchy-egyenlőtlenség.
Jensen-egyenlőtlenség.

Statisztika, valószínűség

Statisztikai mintavétel.

Mintavétel visszatevéssel, visszatevés nélkül.

Számsokaságok jellemzése: átlag, medián, módusz, szórás.

Átlagos abszolút eltérés, átlagos négyzetes eltérés.

A medián és az átlag minimumtulajdonsága.

Eseményalgebra.

Kapcsolat a halmazok és logika műveleteivel.

Véletlen jelenségek megfigyelése.

A modell és a valóság kapcsolata.

Klasszikus valószínűségi modell.

Események összegének, szorzatának, komplementerének valószínűsége.

Kizáró események, független események valószínűsége.

Feltételes valószínűség.

Mintavételre vonatkozó valószínűségek megoldása klasszikus modell alapján.

Nagy számok törvénye

A továbbhaladás feltételei:

Gondolkodási és megismerési módszerek

- Halmazok számosságával kapcsolatos ismeretek áttekintése.
- A kombinatorikai problémák rendszerezése.
- Bizonyítási módszerek áttekintése.
- A gráfok eszköz jellegű használata probléma megoldásában.

Számelmélet, algebra

- A kiterjesztett gyök-, és hatványfogalom ismerete.
- A logaritmus fogalmának ismerete.
- A gyök, a hatvány és a logaritmus azonosságainak alkalmazása konkrét esetekben probléma megoldása céljából.
- Exponenciális és logaritmosus egyenletek megoldása, ellenőrzése.
- Trigonometrikus egyenletek megoldása, az azonosságok alkalmazása, az összes gyök megtalálása.
- Egyenletek ekvivalenciájának áttekintése.
- A számológép biztos használata.

Függvények, az analízis elemei

- Exponenciális-, logaritmus- és a trigonometrikus függvények értelmezése, ábrázolása, jellemzése.
- Függvénytranszformációk.
- Exponenciális folyamatok matematikai modellje.
- A számtani és a mértani sorozat. Rekurzív sorozatok.
- Pénzügyi alapfogalmak ismerete, pénzügyi számítások megértése, reprodukálása, kamatos kamatszámítás elvégzése.

- Sorozatok vizsgálata monotonitás, korlátosság, határérték szempontjából. Véges és végtelen sorok összegzése.

Geometria

- Vektorok a koordináta-rendszerben, helyvektor, vektorkoordináták.
- Két vektor skaláris szorzata, vektoriális szorzata.
- Jártasság a háromszögek segítségével megoldható problémák önálló kezelésében, szinusztétel, koszinusztétel alkalmazása.
- A geometriai és algebrai ismeretek közötti kapcsolódás elemeinek ismerete: távolság, szög számítása a koordináta-rendszerben, kör, egyenes, parabola egyenlete, geometriai feladatok algebrai megoldása.

Valószínűség, statisztika

- Statisztikai mutatók használata adathalmaz elemzésében.
- A valószínűség matematikai fogalma, klasszikus kiszámítási módja.
- Mintavétel és valószínűség kapcsolata, alkalmazása.

12. évfolyam

Folytonosság, differenciálszámítás

A valós számok halmazán értelmezett függvények jellemzése.

Függvény határértéke.

A függvények határértékének szemléletes fogalma, pontos definíciói. Jelölések.

Függvények véges helyen vett véges; véges helyen vett végtelen; végtelenben vett véges; végtelenben vett végtelen határértéke.

A sorozatok és a függvények határértékének kapcsolata.

A $\frac{\sin x}{x}$ függvény vizsgálata, az $x = 0$ helyen vett határértéke.

A függvények folytonossága.

Intervallumon folytonos függvények.

Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai.

A differenciálhatóság fogalma.

A különbségi hányados függvény, a differenciálhányados (derivált), a deriváltfüggvény.

Kapcsolat a differenciálható és a folytonos függvények között.

Alapfüggvények deriváltja: konstans függvény, x^n , trigonometrikus függvények deriváltja.

Műveletek differenciálható függvényekkel.

Függvény konstansszorosának deriváltja, összeg, szorzat, hányados, összetett függvény deriváltja.

Inverz függvény deriváltja.
Exponenciális és logaritmusfüggvény deriváltja. Magasabb rendű deriváltak.
A függvény tulajdonságai és a derivált kapcsolata.
Lokális növekedés, fogyás – intervallumon monoton függvény.
Szélsőérték – lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték.
A szükséges és az elégséges feltételek pontos megfogalmazása, alkalmazása.
Konvexitás, vizsgálata deriválással.
Inflexiós pont.
A második derivált és a konvexitás kapcsolata.
Függvényvizsgálat differenciálszámítással.

Integrálszámítás, térgeometria

A területszámítás alapelvei, módszerei
A térfogatszámítás alapelvei.
A térfogatszámítás új elemei.
Cavalieri-elv, a gúla térfogata.
Csonka gúla térfogata.
Érintőpoliéderek térfogata.
Alakzatok felszíne, hálójá.
Csonkakúp felszíne.
Gömb felszíne
Térgeometria elemei.
Tetraéderekre vonatkozó tételek.
Ortogonalis tetraéder.
Tetraéder és paralelepipedon.
Euler-féle poliéder-tétel. Szabályos testek.
Bevezető feladatok az integrál fogalmához.
Függvény grafikonja alatti terület.
A megtett út és a sebesség-idő grafikon alatti terület.
A munka kiszámítása az erő-út grafikon alatti terület alapján.
Alsó és felső közelítő összegek.
Az intervallum felosztása, a felosztás finomítása.
Közelítés véges összegekkel.
A határozott integrál fogalma, jelölése.
Negatív függvény határozott integrálja.
A határozott integrál és a terület-előjeles terület.
Az integrál közelítő kiszámítása.
Az integrálhatóság szükséges és elegendő feltétele.
Korlátos és monoton függvények integrálhatósága.
A határozott integrál tulajdonságai.
Az integrál mint a felső határ függvénye.
Integrálfüggvény.
Folytonos függvény integrálfüggvényének deriváltja.
Kapcsolat a differenciálszámítás és az integrálszámítás között.
A primitív függvény fogalma.
A primitív függvények halmaza – a határozatlan integrál:
– hatványfüggvény, polinom függvény;
– trigonometrikus függvények;

- exponenciális függvény, logaritmusfüggvény.

A Newton-Leibniz tétel.

Integrálási módszerek: integrálás helyettesítéssel.

Az integrálszámítás alkalmazása matematikai és fizikai problémákra.

Két függvénygörbe közötti terület meghatározása.

Forgástest térfogatának meghatározása.

Henger, kúp, csonka kúp, gömb, gömbszelet térfogata.

Az integrálás közelítő módszerei – numerikus módszerek.

Néhány egyszerűbb improprius integrál.

Néhány hatványsor

Néhány egyszerűbb improprius integrál.

Néhány hatványsor

A továbbhaladás feltételei

Függvények, az analízis elemei

- A függvények vizsgálata, jellemzése elemi eszközökkel és differenciálszámítás használatával.
- Az integrálszámítás használata, gyakorlati alkalmazása

Geometria

- Térbeli viszonyok, testek felismerése, geometriai modell készítése.
- Távolság, szög, kerület, terület, felszín és térfogat kiszámítása.